PART3　三角形の面積，三角形の外心の座標

3　△ABC で，辺 BC，CA，AB の中点をそれぞれ L(4, −1)，M(−1, 1)，N(−2, −5) とする。次の問いに答えよ。

(1)　点 A，B，C の座標をそれぞれ求めよ。

(2)　直線 AB の方程式，および点 C から直線 AB に下ろした垂線の長さを求めよ。また，△ABC の面積を求めよ。

(3)　△ABC の外心の座標を求めよ。

Point Pickup

点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は　$d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

3 点 O(0, 0)，A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ を頂点とする △OAB の面積 S は　$S=\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$

三角形の外心は，各辺の垂直二等分線の交点

第4講　PART3　確認問題

△ABC において，辺 BC，CA，AB の中点をそれぞれ L$(-2,\ 2)$，M$(1,\ 0)$，N$(0,\ 3)$ とする。

1　点 A，B，C の座標をそれぞれ求めよ。

A(［ア］，［イ］)，B(［ウエ］，［オ］)，

C(［カキ］，［クケ］)

2　点 B から直線 AC に下ろした垂線の長さ d と，△ABC の面積を求めよ。

$d=\dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}$，△ABC＝［スセ］

3　△ABC の外心の座標を求めよ。

$\left(\dfrac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チ}}},\ \dfrac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{ト}}}\right)$

PART3　三角形の面積，三角形の外心の座標

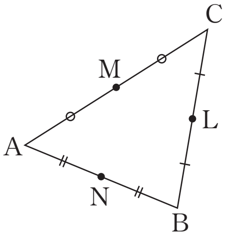
3　△ABC で，辺 BC，CA，AB の中点をそれぞれ L(4，−1)，M(−1，1)，N(−2，−5) とする。次の問いに答えよ。

(1)　点 A，B，C の座標をそれぞれ求めよ。

(2)　直線 AB の方程式，および点 C から直線 AB に下ろした垂線の長さを求めよ。また，△ABC の面積を求めよ。

(3)　△ABC の外心の座標を求めよ。

(1)　$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，$C(x_3,\ y_3)$ とすると，条件より



$$\frac{x_1+x_2}{2}=-2,\quad \frac{x_2+x_3}{2}=4,\quad \frac{x_3+x_1}{2}=-1$$

よって　$x_1+x_2=-4$，$x_2+x_3=8$，$x_3+x_1=-2$

これらより　$x_1=-7$，$x_2=3$，$x_3=5$

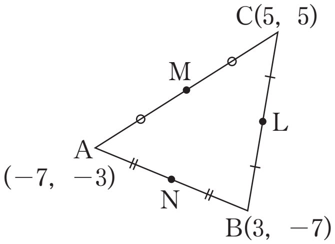
同様に

$$\frac{y_1+y_2}{2}=-5,\quad \frac{y_2+y_3}{2}=-1,\quad \frac{y_3+y_1}{2}=1$$

より　$y_1=-3$，$y_2=-7$，$y_3=5$

よって　A(−7，−3)，B(3，−7)，C(5，5)

(2)　直線 AB の方程式は



$$y=\frac{-7-(-3)}{3-(-7)}(x-3)-7 \qquad y=-\frac{2}{5}(x-3)-7$$

よって　$2x+5y+29=0$

点 C から直線 AB に下ろした垂線の長さ d は，点 C と直線 AB との距離で

$$d=\frac{|2\cdot5+5\cdot5+29|}{\sqrt{2^2+5^2}}=\frac{64}{\sqrt{29}}$$

また　$AB=\sqrt{(3+7)^2+(-7+3)^2}=\sqrt{116}=2\sqrt{29}$

よって　$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot d=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{29}\cdot\frac{64}{\sqrt{29}}=64$

(3) 求める外心は，線分 AB，線分 BC それぞれの垂直二等分線の交点である。

線分 AB の垂直二等分線は，線分 AB の中点 N を通り，AB に垂直な直線である。

その方程式は $y=\dfrac{5}{2}(x+2)-5$ すなわち $5x-2y=0$ …… ①

線分 BC の垂直二等分線は，線分 BC の中点 L を通り，BC に垂直な直線である。

直線 BC の傾きは $\dfrac{5-(-7)}{5-3}=6$ であるから，線分 BC の垂直二等分線の方程式は

$$y=-\frac{1}{6}(x-4)-1 \quad \text{すなわち} \quad x+6y+2=0 \text{ …… ②}$$

①，②より $x=-\dfrac{1}{8}$，$y=-\dfrac{5}{16}$

したがって，求める外心の座標は $\left(-\dfrac{1}{8},\ -\dfrac{5}{16}\right)$

第 4 講　PART3　確認問題 解答

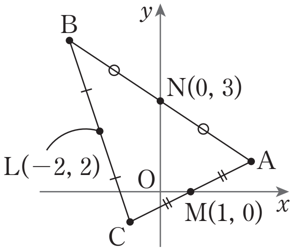
1

[正解] ア：3，イ：1，ウエ：-3，オ：5，
カキ：-1，クケ：-1

[解説]

$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$ とする。

△ABC の各辺の中点が L，M，N という条件から，x 座標について



$$\frac{x_1+x_2}{2}=0, \quad \text{[A]}$$

$$\frac{x_2+x_3}{2}=-2,$$

$$\frac{x_3+x_1}{2}=1$$

[A]　2 点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ を結ぶ線分 AB の中点の座標は
$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

ゆえに

$$x_1+x_2=0,\ x_2+x_3=-4,\ x_3+x_1=2$$

よって　$x_1=3$，$x_2=-3$，$x_3=-1$

同様に，y 座標について

$$\frac{y_1+y_2}{2}=3,\ \frac{y_2+y_3}{2}=2,\ \frac{y_3+y_1}{2}=0$$

ゆえに

$$y_1+y_2=6,\ y_2+y_3=4,\ y_3+y_1=0$$

よって　$y_1=1$，$y_2=5$，$y_3=-1$

したがって

A(3, 1)，B(−3, 5)，C(−1, −1)

2　[正解] コサ：14，シ：5，スセ：14

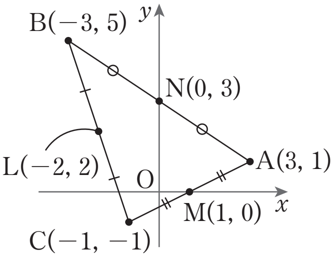
[解説]

A(3, 1)，C(−1, −1) より，直線 AC の方程式は

$$y-1=\frac{1-(-1)}{3-(-1)}(x-3)$$

ゆえに　$x-2y-1=0$

点 B から直線 AC に下ろした垂線の長さ d は，B(−3, 5) と AC の距離であるから



$$d=\frac{|-3-2\cdot5-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$$ [B]

$$=\frac{\mathbf{14}}{\sqrt{\mathbf{5}}}$$

また　$AC=\sqrt{\{3-(-1)\}^2+\{1-(-1)\}^2}=2\sqrt{5}$

よって

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot d=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{5}\cdot\frac{14}{\sqrt{5}}=\mathbf{14}$$

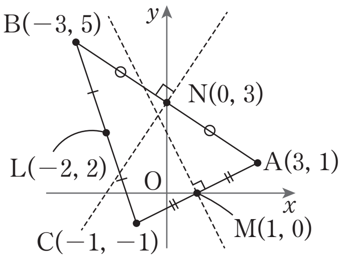
[B]　点と直線の距離
点 (x_1, y_1) と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

3　**[正解]** ソタ：-2，チ：7，ツテ：18，ト：7

[解説]

求める外心は，線分 AC，AB それぞれの垂直二等分線の交点である。[C]



線分 AC の垂直二等分線は，線分 AC の中点 M を通り，線分 AC に垂直な直線である。

[C]　三角形の外心は，三角形の各辺の垂直二等分線の交点。

直線 AC の方程式は $x-2y-1=0$ で，傾きは $\frac{1}{2}$ であるから，線分 AC の垂直二等分線の方程式は

$$y=-2(x-1)$$ [D]

すなわち　$y=-2x+2$ …… ①

[D]　点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，傾きが m である直線の方程式
$y-y_1=m(x-x_1)$
$\Longleftrightarrow y=m(x-x_1)+y_1$

また，線分 AB の垂直二等分線は，線分 AB の中点 N を通り，線分 AB に垂直な直線である。

A(3，1)，B(−3，5) より，直線 AB の傾きは

$\frac{1-5}{3-(-3)}=-\frac{2}{3}$ であるから，線分 AB の垂直二等分線の方程式は

$$y=\frac{3}{2}x+3 \quad \cdots\cdots ②$$ [D]

①，②より　$x=-\frac{2}{7}$，$y=\frac{18}{7}$

よって，△ABC の外心の座標は

$$\left(-\frac{2}{7},\ \frac{18}{7}\right)$$